4次元シンプレクティック写像の不安定多様体の漸近展開(ポスターセッション,ハミルトン力学系とカオス,研究会報告)

平田, 吉博; 小西, 哲郎

4次元シンプレクティック写像の不安定多様体の漸近展開

名大・理　平田 吉博*、小西 哲郎

保存力学系は2自由度以上でカオスになり得るが、2自由度と3自由度以上では相空間の構造が大きく異なる。そして3自由度の近可積分系でさえ、その相空間の高次元性により未解決な問題が多い。一方、保存系のポアンカレ写像はシンプレクティック写像になることが知られており、我々は3自由度保存系(相空間次元は6次元)のポアンカレ写像のモデルである、4次元シンプレクティック写像を扱う。

ここでシンプレクティック写像とは、偶数次元($2n$とする)の可微分写像で、正準変数$(q_1,\cdots,q_n, p_1,\cdots,p_n)$で書いたヤコビアンを$M$とした時、

$$ {}^{\mathrm{T}}MJM \;=\; J \tag{1}$$

が成り立つものである。ここで、

$$ J \;=\; \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

であり、$\mathbf{0}_n$,$\mathbf{I}_n$はそれぞれ$n \times n$の零行列、単位行列である。

近可積分系のダイナミクスを考える上で、シンプレクティック写像の双曲点近傍の安定・不安定多様体の様子を調べる事は非常に重要である。これは保存系の場合、ポアンカレ写像における安定・不安定多様体の相互横断的交差により、ハミルトニアンと独立な1価解析的な保存量の非存在が証明され、このとき系はカオスになるからである。特に、高次元系の場合は視覚化できないため、解析的な手法が有力である。

近年、2次元シンプレクティック写像の不安定多様体を、解析的に漸近展開する特異摂動論が報告されている[1–3]。この方法は、シンプレクティック写像の不安定多様体を、摂動パラメータϵの形式的巾級数の形で一旦表わす。そして、その摂動展開の破綻する領域で時間を複素領域に拡張し、ボレル・ラプラス変換を用いることにより、$\exp\left(-\frac{t}{\epsilon}\right)$型の項をとらえる事ができる。このタイプの$\epsilon \to 0$に対して指数的に小さくなる項は、保存系のホモクリニック構造に特徴的であり、正の実軸に沿って$\epsilon \to 0$とした時ϵの任意の自然数巾よりも速く0になるため、正則摂動では決してとらえる事ができない。そしてストークス現象を考慮して形式的巾級数解とつなぐ事により、不安定多様体の漸近解を初等関数を用いて表現できる。

我々は、正準母関数

$$ W \;=\; \sum_{j=1}^{2} p'_j q_j + \epsilon \left[\sum_{j=1}^{2} \frac{p'^2_j}{2} + \sum_{j=1}^{2} \left(\frac{q_j^4}{2} - \frac{q_j^2}{2} \right) + \epsilon^2 \kappa \tilde{J} \right] \tag{3}$$

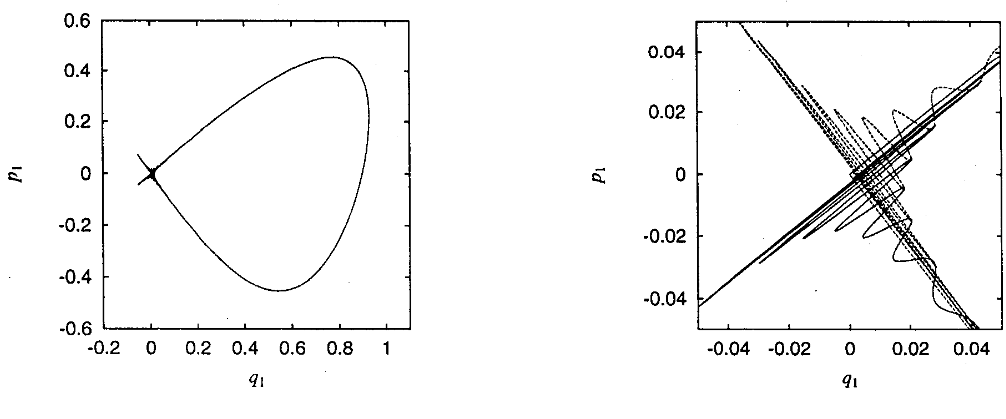
*e-mail : yhirata@allegro.phys.nagoya-u.ac.jp

から導かれる4次元シンプレクティック写像 $(q_1, q_2, p_1, p_2) \mapsto (q'_1, q'_2, p'_1, p'_2)$

$$\begin{cases} p'_1 &= p_1 - \epsilon\left(2q_1^3 - q_1\right) - \epsilon^{\gamma+1}\kappa\,\dfrac{\partial \tilde{J}}{\partial q_1} \\ q'_1 &= q_1 + \epsilon p'_1 \\ p'_2 &= p_2 - \epsilon\left(2q_2^3 - q_2\right) - \epsilon^{\gamma+1}\kappa\,\dfrac{\partial \tilde{J}}{\partial q_2} \\ q'_2 &= q_2 + \epsilon p'_2 \end{cases} \tag{4}$$

に対してこの方法を拡張する。ここで、$0 < \epsilon \ll 1$ は摂動パラメータ、$\kappa \in \mathbf{R}$ は結合定数、$\tilde{J} = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2}$ が結合項で、$\alpha_1, \alpha_2, \gamma \in \mathbf{N}$ である。この写像は母関数 (3) からも明らかなように、2つの2次元シンプレクティック写像を結合項 $\tilde{J}$ で結びつけたものであり、原点に (双曲×双曲) 点を持つため、$\epsilon \neq 0$ であれば、他のパラメータによらず2次元の安定・不安定多様体が存在する。

我々はこれまでに、$\tilde{J} = q_1 q_2^2, \gamma = 2$ の場合の1次元部分不安定多様体を解析的に構成することに成功している [4]。(4) 式において1階の微分があるため、結合は2次であり、最も弱い非線形結合の1つである。この場合は結合項の次数が小さいため、ホモクリニック振動は2次元シンプレクティック写像の直積として記述でき、直接的な拡張が可能であった。そしてもちろんその結果も、2次元系の直積に定量的な高次元効果が加わったものであった。図1に解析的

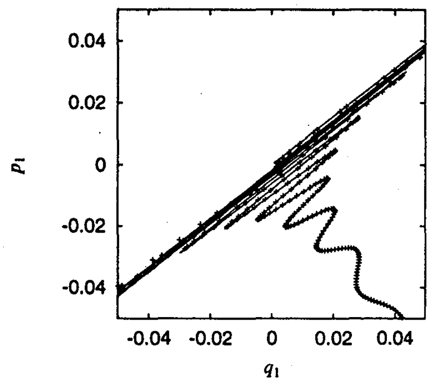


(a) (q_1, p_1) 平面に射影した安定・不安定多様体。 (b) 双曲点近傍の拡大図。

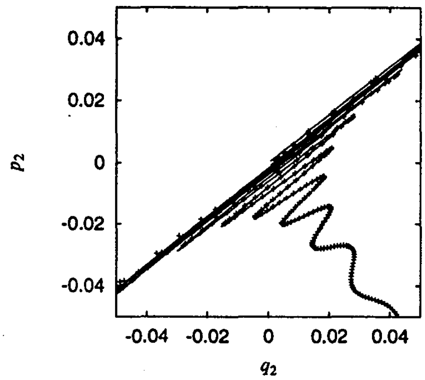
図 1: $\epsilon = 0.5, \kappa = 1.0$ の安定多様体 (点線) と不安定多様体 (実線)。

に得られた1次元部分安定・不安定多様体を (q_1, p_1) 平面に射影して示す。(q_2, p_2) 平面への射影も定性的には同様である。この図より、双曲点近傍でのホモクリニック構造がよく再現されている事がわかる。これらの部分多様体は安定・不安定多様体に含まれているので、安定・不安定多様体自身も振動している事がわかる。図2に解析解と数値解の比較を示す。この図より、今回得られた解析解は数値解をよい精度で近似している事がわかる。またパラメータ ϵ, κ のその他の値に対しても、同様によい精度で解析解が得られる事がわかっている。

次に、写像 (4) において定性的な高次元効果の現れる条件について調べた。これは形式的巾



(a) (q_1, p_1)



(b) (q_2, p_2)

図 2: 不安定多様体の解析解と数値解の比較。パラメータは図1と同じであり、数値解は不安定多様体上に３０個の初期値を等間隔でとり、写像 (4) により時間発展させた。

級数解の持つ特異点の性質から議論される。結果として、結合項のパラメータ $\alpha_1, \alpha_2, \gamma$ の間に

$$\alpha_1 + \alpha_2 \geq \gamma + 4 \tag{5}$$

の関係が成り立つ場合、ホモクリニック振動はポテンシャルの４次の非線形項よりも、結合項により支配的に決められる事がわかった。これは明らかに定性的な高次元効果であり、写像 (4) が本質的な高次元性を示す十分条件である。さらにそのような場合は、不安定多様体を構成する際に２次元系からの直接的な拡張が不可能であり、この方法が破綻する。破綻の具体的な理由は、２次元系や弱い結合の４次元系ではパラメータに依らない定数であったストークス定数が κ に依存し、それが一般には収束しないためである。

現在、この条件 (5) の下では不安定多様体を求める事はできず、この方法の改良を行う必要がある。この改良は現在までにはまだできていないが、今後成功すれば、本質的な高次元性を持つ写像についての新たな知見が得られる事が期待される。

また、これまでに１次元部分不安定多様体は求められたが、２次元の不安定多様体自体は構成できていない。これも今後の課題である。

[1] V. Hakim and K. Mallick, Exponentially small splitting of separatrices, matching in the complex plane and Borel summation, *Nonlinearity*, **6**, (1993) 57–70.

[2] A. Tovbis, M. Tsuchiya and C. Jaffé, Exponential asymptotic expansions and approximations of the unstable and stable manifolds of the Hénon map, *preprint* (1996).

[3] K. Nakamura and M. Hamada, Asymptotic expansion of homoclinic structures in a symplectic mapping, *J. Phys., A* **29** (1996) 7315–7327.

[4] Y. Hirata and T. Konishi, Asymptotic expansion of the unstable manifold in a 4-dimensional symplectic mapping, *in preparation.*